Global KnotsのConjugationとPrime分解(低次元多様体の幾何構造と位相構造)

数理解析研究所講究録
542巻 1985年 1-10

Global Knotsの Conjugationと Prime分解

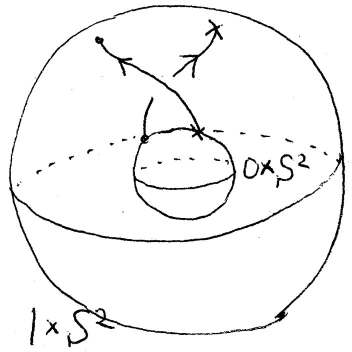
東大 理 宮崎 桂
(Katura Miyazaki)

S^3のknotがただ一通りのprime分解を持つことはよく知られている。しかし、一般の3次元多様体のknotについては"prime knot"はしばしば定義されるが(e.g. Gordon-Litherland [1]) prime分解自体は調べられていないようだ。closed, oriented 3-mfdのoriented knotのprime分解については次の定理が成立する。(言葉の正確な定義は§1参照)

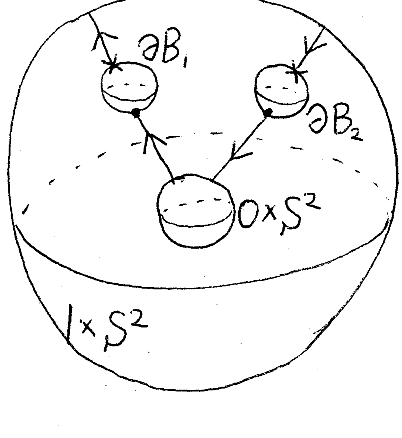
<u>定理1</u> (存在条件) nontrivial knot $\mathcal{K}=(M,K)$がprime分解をもつ必要十分条件は、meridian m ($\subset \partial N(K)$)がexterior $M-\mathrm{Int}\,N(K)$でessentialなこと。

この定理は Haken の有限性定理と innermost disk argument によりたやすく示される。([1] の section 1 に全ての link が prime 分解を持つと書いてあるのは誤り)。分解の規則を述べるには、§2で定義される knot どうしの conjugation という概念が必要になる。さらに、prime knot $\mathcal{R}$ と $\mathcal{U}$ を次のように定義する。

$\mathcal{R}$ を $S^1\times S^2$ の knot で、$(I\times S^2, I\times\{p_1, p_2\})$ から $0\times S^2$ と $1\times S^2$ を同一視して得られるものとする。



$2S^1\times S^2$ の knot $\mathcal{U}$ は次のように定める。2つの circle $t_1\equiv S^1\times p_1$, $t_2\equiv S^1\times p_2$ $(\subset S^1\times S^2)$ に逆の向きを入れる。B_1, B_2 $(\subset S^1\times S^2)$ を $(B_i, B_i\cap t_i)$ が trivial ball pair かつ $B_1\cap B_2=\phi$ にとる。そして $(S^1\times S^2, t_1\cup t_2)$ から B_1, B_2 を取り除き、できた境界 $(\partial B_i, \partial B_i\cap t_i)$ $i=1,2$ を orientation reversing homeo. で同一視して得られる knot が $\mathcal{U}$ である。



<u>定理2</u>　$\mathcal{K}$をprime分解を持つknotとする。

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \cdots \# \mathcal{K}_t \# n\mathcal{R} \# m\mathcal{U} \# (N, \phi)$$
$$= \mathcal{K}'_1 \# \cdots \# \mathcal{K}'_{t'} \# n'\mathcal{R} \# m'\mathcal{U} \# (N', \phi)$$

を$\mathcal{K}$のprime分解とする。ただし、$\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}'_i$は$\mathcal{R}$でも$\mathcal{U}$でもないprime knot、N, N'は3-mfd。このとき次の1)〜3)が成立する。

1) $t = t'$。$\mathcal{K}_i$は$\mathcal{K}'_i$のconjugation (up to order)

2) $n + 2m = n' + 2m'$。もし$n = 0$なら$n' = 0$かつ $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}'_i$ (up to order)。

3) $N = N'$。

<u>系</u>　knot $\mathcal{K}$が$\mathcal{R}$をfactorに含まないprime分解を持てば、それが$\mathcal{K}$の唯一のprime分解である。

<u>定理3</u>　$\mathcal{K}_1$が$\mathcal{K}_2$のconjugationなら、$\mathcal{R} \# \mathcal{K}_1 = \mathcal{R} \# \mathcal{K}_2$。特に、$\mathcal{R} \# \mathcal{R}$は$\mathcal{U}$のconjugationなので$\mathcal{R} \# \mathcal{R} \# \mathcal{R} = \mathcal{R} \# \mathcal{U}$。

定理2，3からprime分解は“conjugation”の範囲で多意性を持つことがわかる。本稿ではconjugationの説明に主眼をおき、定理の証明については§3でアイデアを述べ

るにとどめる。　　くわしくは preprint [2] を参照のこと。

§1　M を closed, oriented 3-mfd, $K (\subset M)$ を oriented circle とした時，対 (M, K) を knot と呼ぶ。K のことを knot と呼ぶこともある。2 つの knot は，その間に orientation preserving homeo. があるとき同じものとみなす。

2 つの knot $\mathcal{K}_i = (M_i, K_i)$ $i = 1, 2$ の和 $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ は対 $(M_1, K_1) \# (M_2, K_2)$ で def する。

$\mathcal{K} = (M, K)$ が trivial knot $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ K に embedded disk がはれる。

$\mathcal{K}$ が prime knot $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{K}$ は nontrivial knot で，任意の分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ に対して $\mathcal{K}_1$ or $\mathcal{K}_2$ は S^3 の trivial knot.

この定義によると，prime knot の exterior は irreducible 3-mfd。

分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \cdots \# \mathcal{K}_n \# (N, \phi)$，N は 3-mfd，は $\mathcal{K}_1, \cdots, \mathcal{K}_n$ が prime knot のとき，prime 分解と呼ぶ。

§2　X を connected, oriented 3-mfd で $\partial X = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ は n 個の torus，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を $\alpha_i \subset T_i$ なる essential oriented circle とする。対 $(X, \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i)$ から次のように

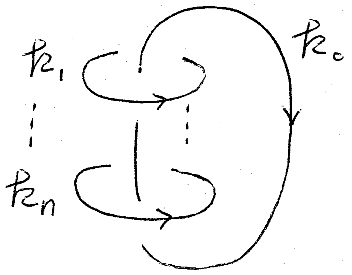
knotを構成する。

<u>構成</u> 1 (V_1, a_1) (V_2, a_2) を trivial ball pair とする。
orientation revers. embedding $f : \displaystyle\coprod_{disjoint} N(\alpha_i) \longrightarrow \partial V - \partial a_1$ を
$lk_{V_1}(f(\alpha_i), a_1) = +1$ になるようにとる。この時
$M = X \underset{f}{\cup} V_1$ とおくと $\partial M = S^2$, arc a_1 は M に properly embedded。よって $(M, a_1) \cup (V_2, a_2)$ は knot $\mathcal{K}$
$\qquad (\partial M, \partial a_1) = (\partial V_2, \partial a_2)$
を与える。
この $\mathcal{K}$ は $(X, \cup\alpha_i)$ と f に依存しているようだが、実は f のとり方にはよらないことが次からわかる。

<u>構成</u> 2　上で作った $\mathcal{K}$ を再構成する。

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= (M, a_1) \cup (V_2, a_2) \\ &= (X \underset{f}{\cup} (V_1, a_1)) \cup (V_2, a_2) \\ &= X \cup ((V_1, a_1) \cup (V_2, a_2))\end{aligned}$$ と書ける。

$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 - \partial X$ は n 個の annulus と 2個の disk $N(\partial a_1)$ からなる。(V_i, a_i) は trivial ball pair なので $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} k_i$ を図のような S^3 の link とすると、$(V_1, a_1) \cup (V_2, a_2) = (S^3 - \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathring{N}(k_i), k_0)$ となる。

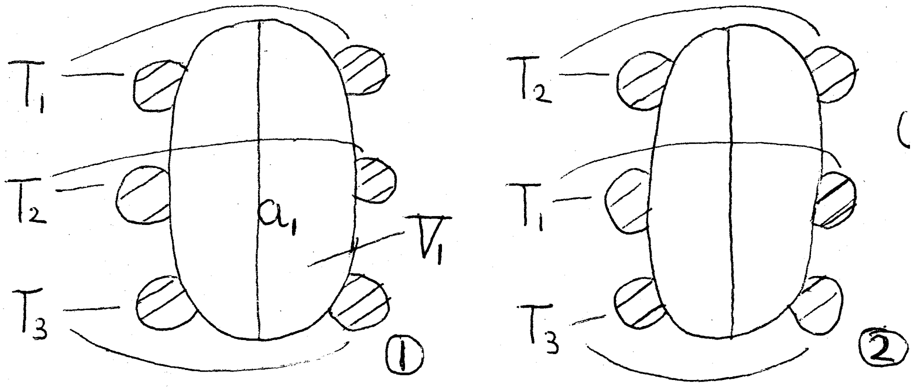


$(C_n, k_0) = (S^3 - \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathring{N}(k_i), k_0)$ とおくと、

$$\mathcal{K} = X \underset{\partial X = \partial C_n}{\cup} (C_n, k_0)$$

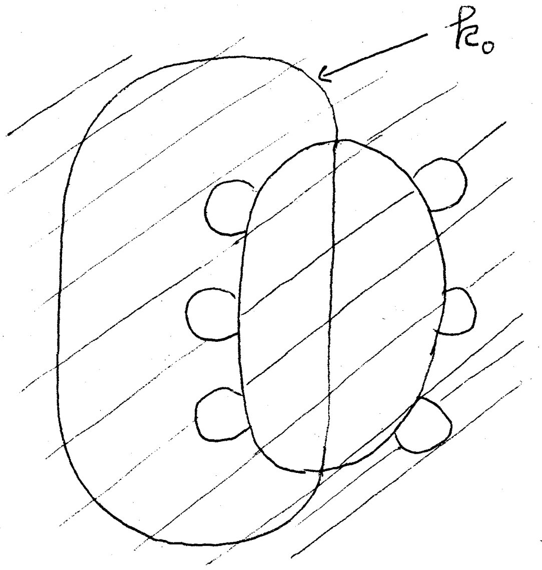
と書ける。

この union $\cup$ は f から induce される orientation rev. homeo $\hat{f} : \bigcup^{n} T_i \longrightarrow \bigcup^{n} \partial N(k_i) = \partial C_n$ で定められる。(この時、$lk_{C_n}(\hat{f}(\alpha_i), k_i) = +1$, $lk_{C_n}(\hat{f}(\alpha_i), k_j) \underbrace{= 0}_{\text{for } \forall i, j}$ となる)。
$\forall i \neq j$ に対して (C_n, k_0) の orientation pres. autohomeo g で $g(\partial N(k_i)) = \partial N(k_j)$、$g(\partial N(k_j)) = \partial N(k_i)$、$g | \partial N(k_\ell) = id$ for $\ell \neq i, j$、となるものがあるので $\mathcal{K}$ は f のとり方にはよらない。(下図も参照せよ)



斜線部は X
(実際は連結)

f のとり方により (M, a_1) の断面図は ① にも
② にもなる。



$\mathcal{K} = (M, a_1) \cup (V_2, a_2)$
の断面図。斜線部は C_3
(M, a_1) が ① でも ② でも
$\mathcal{K}$ は同じになる。

定義　上の $(X, \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i)$ を $\mathcal{K}$ の degree n の inducing-pair と呼ぶ。$(X, \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i)$ は $\mathcal{K}$ の inducing-pair、$(X', \bigcup_{i=1}^{n'} \alpha'_i)$ は $\mathcal{K}'$ の inducing-pair とする。もし $X = X'$, かつ 各 i ごとに α_i が α'_i or $-\alpha'_i$ に ∂X で isotopic (up to order) ならば、$\mathcal{K}$ は $(X, \bigcup_{i=1}^{n} \pm\alpha_i)$ を介して $\mathcal{K}'$ の conjugation であるという。略して $\mathcal{K}$ は $\mathcal{K}'$ の conjugation と呼ぶ。

注意　任意の knot $(M, K) = \mathcal{K}$ について、$\underbrace{\text{exterior}}^{E(\mathcal{K})}$ と $\underbrace{\text{meridian}}_{m}$ (ただし oriented s.t. $lk(K, m) = +1$) との対 $(E(\mathcal{K}), m)$ は $\mathcal{K}$ の inducing-pair になる。$(E(\mathcal{K}), -m)$ は $(M, -K) \equiv -\mathcal{K}$ の inducing-pair なので、$\mathcal{K}$ は $-\mathcal{K}$ の conjugation。

§3　最後に conjugation や inducing pair が どのように prime 分解にかかわってくるかをみる。

簡単のため、knot $\mathcal{K} = (M, K)$ が $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}'_1 \# \mathcal{K}_2$ という2通りの prime 分解を持つとする。このとき K と2点で横断的に交わる separating 2-sphere S, S' があり、

$$(M, K) = (M_1, a_1) \underset{S}{\cup} (M_2, a_2) \quad \text{s.t. } (M_i, a_i)^{\wedge} = \mathcal{K}_i$$
$$= (M'_1, a'_1) \underset{S'}{\cup} (M'_2, a'_2) \quad \text{s.t. } (M'_i, a'_i)^{\wedge} = \mathcal{K}'_i$$

となっている。

<u>目標</u> $\mathcal{K}_1$ は $\mathcal{K}_1'$ の conjugation (up to order)。

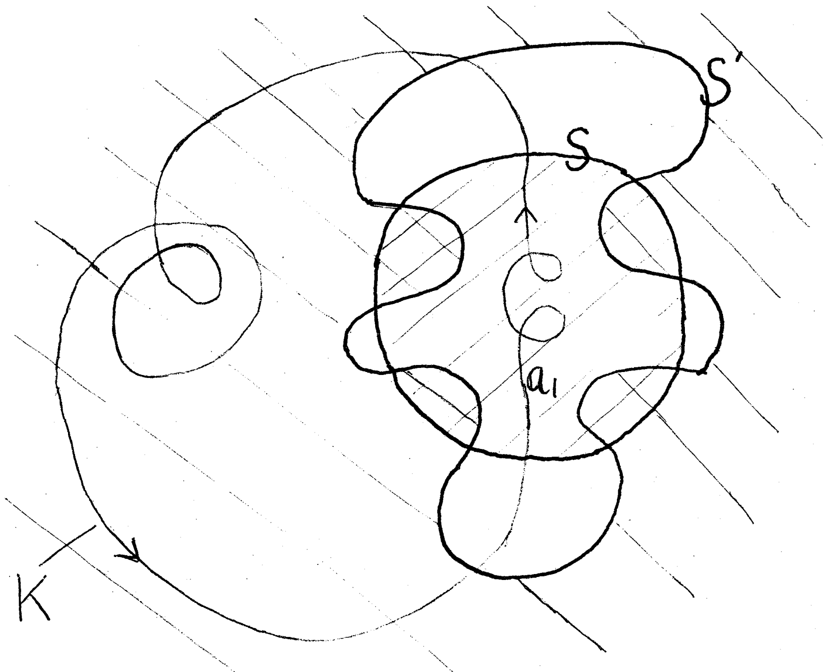
<u>証明方針</u> 議論をやさしくするため、いくつか都合のいい仮定をおく。

<u>仮定1</u> S' は次の条件をみたす位置まで isotopy で動かせる。1° S' と S は横断的に交わる 2° $S'\cap a_1=\phi$ 3° $S'\cap S$ は $\underbrace{\partial S-\partial a_1}_{\text{および } \partial S'-\partial a_1'}$ に含まれる essential circle からなる。

この結果 $S'\cap M_1$ は ϕ または いくつかの annulus からなる。ϕ ならば $M_1\supset M_1'$ として一般性を失わないので $\mathcal{K}_1=\mathcal{K}_1'$。以下 ϕ でないとする。

<u>仮定2</u> $M-S'$ は2つの連結成分 X, ∇ からなる。さらに $X\neq S^1\times D^2$, $\partial\nabla=S^2$ である。

仮定1、2の結果 ∂X はいくつかの torus からなり、S, S', K の関係は断面図で次のページの図のようにかける。$\mathcal{K}_1=(X\underset{2\text{ annuli}}{\cup}(\nabla,a_1))^\wedge$ とかけることに注意せよ。もし (∇,a_1) が trivial ball pair ならば(仮定3)、$\mathcal{K}_1$ は $(X,\alpha_1\cup\alpha_2)$ を inducing pair に持つ。ただし、α_1, α_2 は2つの annulus $\partial X\cap\partial\nabla$ の core で $lk_\nabla(\alpha_i,a_1)=+1$ となるよう向きづけたもの。



/// 部分 M_1, \\\ 部分は M_1' として一般性を失わない。※部分は X : connected

$\mathcal{K}_1$と同じことを$\mathcal{K}_1'$についても考える。$V' = M_1' -$ $\mathrm{Int}\,X$ とおくと $\mathcal{K}_1' = (X \cup (V', a_1'))^\wedge$ は (V', a_1') が trivial ball pair ならば(仮定3')、$(X, \alpha_1' \cup \alpha_2')$ から induce される。(α_1', α_2' は α_1, α_2 と同様に定める)。$\alpha_1 \cup \alpha_2$ と $\alpha_1' \cup \alpha_2'$ は 2 tori ∂X 上で向きを無視して isotopic。故に $\mathcal{K}_1'$ は $(X, \pm\alpha_1 \cup \pm\alpha_2)$ を介して $\mathcal{K}_1$ の conjugation とわかる。□

以上のように、innermost argument を途中であき

らめるのがミソである。実際には、仮定1は innermost で常に成立し、仮定$\underbrace{3\text{も}}_{\text{と}3'}$ $\mathcal{K}_1$ や $\mathcal{K}_1'$ の primeness と $X \neq S^1 \times D^2$ の仮定により常になりたつ。しかし仮定2は必ずしも成立せず 図のような簡単な関係になるとはかぎらない。それでも innermost の議論は仮定1を示す以上には用いない。くわしくは[2]をみて下さい。Th 2, 3 の $\mathcal{K}$ や $\mathcal{U}$ を考える必要もそこから生じます。

References

[1] C. McA. Gordon and R.A. Litherland, *Incompressible surfaces in branched coverings*, The Smith conjecture, Acad. Press.

[2] K. Miyazaki, *Conjugation and the prime decomposition of knots in closed, oriented 3-mfds*, preprint.